数理解析研究所講究録 1354 巻 2004 年 74-82

Quasicentral Approximate Units and Finitely Generated Groups

大阪教育大学　岡安　類 (OKAYASU Rui)
Osaka Kyoiku University

このノートは Voiculescu によるヒルベルト空間上作用素の摂動理論で定義された不変量と有限生成群との関係についてわかっていることをまとめたものです. [Oka3] と合わせて参照ください.

1 Voiculescu の不変量

まずは簡単に Voiculescu の摂動理論について復習する. 詳しく知りたい場合は, 一般のノルムイデアルは [GK], Voiculescu の摂動理論は [Voi1], [Voi2], [Voi3] やそれらにでている参考文献を参照せよ. このノートでは, H を可分無限次元ヒルベルト空間とし, $\mathbb{B}(H)$, $\mathbb{K}(H)$, $\mathbb{F}(H)$ をそれぞれ有界線形作用素, コンパクト作用素, 有限階作用素全体とする.

定義 1. $T \in \mathbb{F}(H)$ の特異値を $(s_j)_{j\in\mathbf{N}}$ とする. まず,

$$||T||_p = \begin{cases} \sup_{j\in\mathbf{N}} s_j & \text{if } p = \infty \\ (\sum_{j\in\mathbf{N}} s_j^p)^{1/p} & \text{if } 1 \leq p < \infty \end{cases}$$

と定義する. これらのノルムはそれぞれノルムイデアル $\mathbb{K}(H)$, $C_p(H)$(シャッテンクラス) に対応している.

次に, 数列 $\pi = (\pi_j)_{j\in\mathbf{N}}$ で

$$\pi_1 = 1 \geq \pi_2 \geq \pi_3 \geq \cdots \geq 0$$

を満たすものを取ってきたとき,

$$||T||_\pi = \sum_{j\in\mathbf{N}} s_j \pi_j$$

と定義して, このノルムに関して $\mathbb{F}(H)$ を完備化したものを $C_\pi(H)$ と書く. 特に,

$$\pi_j = \frac{j^{1/p}}{j} \qquad (1 < p \leq \infty)$$

としたとき, $(C_p^-(H), ||\cdot||_p^-)$ と書くことにする. $p = \infty$ のとき, $C_\infty^-(H)$ はマサエフノルム (Macaev norm) と呼ばれ, 重要な性質を持っている.

注意 2. 次のような包含関係が成立することを注意しておく.

$$\mathbb{F}(H) \subsetneqq C_p(H) \subsetneqq C_q^-(H) \subsetneqq C_q(H) \subsetneqq C_\infty^-(H) \subsetneqq \mathbb{K}(H) \quad (1 \le p < q < \infty)$$

定義 3. 作用素の組 $\tau = (T_1, \ldots, T_N) \in \mathbb{B}(H)^N$ に対して,

$$k_\pi(\tau) = \liminf_{A \in \mathbb{F}(H)_1^+} \max_{1 \le i \le N} ||T_i A - AT_i||_\pi$$

と定義する. 特に, ノルム $||\cdot||_p^-$ に対しては $k_p^-(\tau)$ と書くことにする. $k_p(\tau)$ についても同様にシャッテンノルム $||\cdot||_p$ に対して定義する. 但し,

$$\mathbb{F}(H)_1^+ = \{A \in \mathbb{F}(H) \mid 0 \le A \le I\}$$

である.

注意 4. $k_\pi(\tau) = 0$ であることと**擬中心的近似列** (quasicentral approximate unit) が存在することは同値である. 即ち,

$$\exists A_n \in \mathbb{F}(H)_1^+, A_n \nearrow I \text{ (SOT)}, ||T_i A_n - A_n T_i||_\pi \to 0 \ (n \to \infty).$$

2 有限生成群と成長度

ここに書いてあることは, 例えば [Har] に詳しく書いてあるので, 興味のある方はそちらの本を参照してください.

Γ を有限生成群, S をその有限生成系とし, 語長を $|\cdot|_S$ で書く. このとき, 語長の長さが n 以下の元の個数を $\beta_n(\Gamma, S)$ で書くことにする.

$$\beta_n(\Gamma, S) = \{g \in \Gamma \mid |g|_S \le n\}.$$

定義 5. $\beta_n(\Gamma, S)$ の増大度により有限生成群 Γ は次の3つのタイプに分類できる.

(1) **指数的** (exponential) $\Longleftrightarrow \beta_n(\Gamma, S) > Cv^n \quad (C > 0, v > 1)$,

(2) **多項式的** (polynomial) $\Longleftrightarrow \beta_n(\Gamma, S) \le Cv^d \quad (C > 0, d \ge 1)$,

(3) **中間的** (intermediate) $\Longleftrightarrow$ 指数的でも多項式的でもない.

注意 6. 上の定義は有限生成系 S の選び方に依らない.

注意 7. 中間的成長度をもつ有限生成群が存在する. (Grigorchuk 群)

定義 8. 次を**成長度エントロピー** (growth entropy) と呼ぶことにする.

$$\mathrm{gr}(\Gamma, S) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log \beta_n(\Gamma, S)}{n}.$$

注意 9. $\mathrm{gr}(\Gamma, S) = 0$ ならば, Γ は指数的成長度をもたない.

定理 10. 有限生成群 Γ が多項式的成長度を持つとき,

$$\exists d \in \mathbb{N},\ C_1 n^d \le \beta_n(\Gamma, S) \le C_2 n^d \quad (C_1, C_2 > 0)$$

が成立する. この自然数 d を多項式的成長度の**次数** (degree) と呼ぶ.

3 Voiculescu の不変量と有限生成群

有限生成群 Γ の左正則表現を λ とするとき, 有限生成系 S をひとつ決めれば, ユニタリー作用素の組 $\lambda_S = (\lambda_s)_{s\in S}$ ができる. まず, マサエフノルムに対する Voiculescu の不変量 $k_\infty^-(\lambda_S)$ について考えると次が成立する.

命題 11. ([Oka1])

$$k_\infty^-(\lambda_S) \le \mathrm{gr}(\Gamma, S).$$

この命題から次のような問題が思いつく.

(1) いつ等号が成立するか?
(もし有限生成群が指数的成長度をもたなければ $\mathrm{gr}(\Gamma, S) = 0$ であるから上の命題より常に等号が成立し, 値はゼロである. よって意味があるのは有限生成群が指数的成長度をもつときである.)

(2) $k_p^-(\lambda_S) \neq 0$ となる p の値を決定する.
(有限生成群が指数的成長度をもたなければ $k_\infty^-(\lambda_S) = 0$ となるから擬中心的近似列がマサエフイデアルに関して存在する. よって, イデアルを小さく (p を小さく) していけば, いつか擬中心的近似列が存在しないイデアルに到達する.)

それぞれの問題について各セクションに分けて考えよう.

3.1 Voiculescu の不変量と成長度エントロピー

Γ を自由群 $\mathbb{F}_N$, S を標準的な生成系としたとき,

$$k_\infty^-(\lambda_S) = \log(2N-1) = \mathrm{gr}(\mathbb{F}_N, S)$$

が成立することがわかっていた ([Oka1]). 自由群は Gromov によって定義された双曲群 ([Gro2]) の典型例である. そこで双曲群について等号が成立するかを考える. まず次の結果を紹介する.

定理 12. ([CP])

(1) X を δ-双曲的な固有測地空間とし．X 上の "コサイクル" 全体の空間を Φ とおく．このとき，Φ から無限遠境界 ∂X への全射連続写像 π が存在する．

(2) 特に X が双曲群 Γ のケーリーグラフのとき，整数値コサイクル全体を $\Phi_0 \subset \Phi$ とおけば，(1) で得られた写像の制限 π_0 は Φ_0 から $\partial\Gamma$ への全射連続写像かつ uniformly finite to one である．

(3) 更に整数値コサイクルの空間 Φ_0 上の連続写像 α が存在し，力学系 (Φ_0, α) はある shift of finite type $\Sigma(\infty)$ と位相共役である．

詳しい定義などは省略するが，重要なことは何か力学系 $\Sigma(\infty)$ があって，それがうまく無限遠境界 $\partial\Gamma$ を "表現" しているということである．ここで構成された力学系の位相的エントロピー $h_{\mathrm{top}}(\Sigma(\infty))$ で $k_\infty^-(\lambda_S)$ の下からの評価が与えられる．

定理 13. ([Oka2]) Γ を双曲群とするとき，

$$h_{\mathrm{top}}(\Sigma(\infty)) \leq k_\infty^-(\lambda_S) \leq \mathrm{gr}(\Gamma, S)$$

が成立する．

我々の目標は等号 $k_\infty^-(\lambda_S) = \mathrm{gr}(\Gamma, S)$ を得ることである．そのためにいつ等号 $h_{\mathrm{top}}(\Sigma(\infty)) = \mathrm{gr}(\Gamma, S)$ が成立するかを考えよう．そのために次の Stallings の定理を使う．

定理 14. ([Sta]) 有限生成群 Γ が無限個の end を持つとき，次のいずれかに分解できる:

(1) $\Gamma = G_1 *_{G_0} G_2$ (融合積), $H \subset G_1, G_2$ は有限部分群.

(2) $\Gamma = G *_{G_0} \theta$ (HNN-拡大), $G_0, \theta(G_0) \subset G$ は有限部分群.

但し，HNN-拡大の定義は群-部分群 $G \supset G_0$ と別の埋め込み $\theta : G_0 \to G$ が与えられたとき，

$$G *_{G_0} \theta := \langle G, x \mid hx = x\theta(h), h \in H \rangle$$

で定義される群である．

定義 15. 双曲群 Γ に対して，$\mathrm{card}\partial\Gamma < \infty$ のとき，**初等的** (elementary) と呼ぶ．

注意 16. 双曲群 Γ が初等的ならば, Γ は指数的成長度をもたないので, $k_\infty^-(\lambda_S) = \mathrm{gr}(\Gamma, S) = 0$ が成立する. よって我々の目的のためには双曲群 Γ が初等的でないと仮定してよい. このとき, Γ の end の個数も無限個ある. したがって, Stallings の定理を適用できるので, 始めから双曲群 Γ は融合積または HNN-拡大に分解されていると仮定する.

定理 17. ([Oka2]) Γ を初等的でない双曲群であり, 定理 14 のように分解されていたと仮定する.

もし, (1) $\Gamma = G_1 *_{G_0} G_2$ かつ S が G_1, G_2 の G_0 を含むような有限生成系 S_1, S_2 の和集合で与えられているか, または (2) $\Gamma = G *_{G_0} \theta$ かつ $S = S_0 \cup \{x, x^{-1}\}$ で S_0 は G の有限生成系で $G_0, \theta(G_0) \subset S_0$ を満たすならば,

$$h_{\mathrm{top}}(\Sigma(\infty)) = \mathrm{gr}(\Gamma, S)$$

が成立する. 特に

$$k_\infty^-(\lambda_S) = \mathrm{gr}(\Gamma, S)$$

を得る.

注意 18. Stallings の分解定理の部分群 G_0 が有限であることから, 上の定理の仮定を満たすような有限生成系 S は必ず存在する. よって上の定理は任意の双曲群 Γ に対して, 等号 $k_\infty^-(\lambda_S) = \mathrm{gr}(\Gamma, S)$ が成立するような有限生成系 S が必ず 1 つは存在するという弱い結果だけしか示していない.

もう少し弱い形で等号が成立するだろうか? つまり,

$$\begin{aligned} \mathrm{gr}(\Gamma) &= \inf_S \mathrm{gr}(\Gamma, S) \\ k_\infty^-(\Gamma) &= \inf_S k_\infty^-(\lambda_S) \end{aligned}$$

と定義したとき, もちろん $k_\infty^-(\Gamma) \le \mathrm{gr}(\Gamma)$ であるが, この場合等号が成立するだろうか? 簡単に $\Gamma = \mathbb{F}_N$ のとき, $k_\infty^-(\mathbb{F}_N) = \mathrm{gr}(\mathbb{F}_N) = \log(2N-1)$ が成立することがわかる.

3.2 Voiculescu の不変量と成長度

問題 (2) については次のような結果が予想される:

予想 19. 有限生成群 Γ に対して,

(1) 指数的 $\Longrightarrow k_\infty^-(\lambda_S) \neq 0$?

(2) 次数 d の多項式的 $\Longrightarrow k_d^-(\lambda_S) \neq 0$?

注意 20. Voiculescu の不変量がゼロまたはゼロでないことは有限生成系 S の取り方に依らない.

既にわかっていることを表でまとめると次のようになる．これは有限生成群が各イデアルに対して擬中心的近似列の存在についての一覧表である．コンパクト作用素全体 $\mathbb{K}(H)$ は C^*-環として $\mathbb{B}(H)$ のイデアルであるから作用素環論の一般論により常に擬中心近似列が存在するので一番右側の列はすべて ○ 印になる．それぞれの欄について注意をしておく．

	$\mathcal{C}_d^-(H)$	$\mathcal{C}_d(H)$	$\mathcal{C}_\infty^-(H)$	$\mathbb{K}(H)$
指数的	× (注 3)	× (注 3)	? (注 1)	○
中間的	× (注 3)	× (注 3)	○ (注 2)	○
次数 d の多項式的	? (注 5)	○ (注 4)	○ (注 2)	○

(注 1) まず Voiculescu が [Voi4] でランダムウォークエントロピー $h(\Gamma,\mu)$ がゼロでなければ，$k_\infty^-(\lambda_S)\neq 0$ を示しているので，特に従順群でなければ，$k_\infty^-(\lambda_S)\neq 0$ がわかる．しかし，Rosenblatt によって，指数的成長度をもつ可解群の存在が示され ([Ros])，この群の場合，どんな μ に対しても $h(\Gamma,\mu)=0$ であることもわかっている ([Kai])．しかしながら指数的成長度をもつ可解群はランク 2 の自由擬群を含むので，これも Voiculescu の結果から，ランク 2 の自由擬群を含む群は $k_\infty^-(\lambda_S)\neq 0$ である ([Voi3])．よって，有限生成群が指数的成長度をもつこととランク 2 の自由擬群を含むことが同値であることを期待したいが，残念ながらランク 2 の自由擬群を含まない指数的成長度をもつ有限生成群は存在するらしい．(例えば，Burnside 群.)

(注 2) 既に注意してある．有限生成群 Γ が指数的成長度をもたなければ，$\mathrm{gr}(\Gamma,S)=0$ となるから．

(注 3) Voiculescu の $h(\Gamma,\mu)\neq 0$ ならば $k_\infty^-(\lambda_S)\neq 0$ の証明 ([Voi4]) を真似ると実は Γ が多項式的成長度をもたなければ，任意の $p<\infty$ に対して，$k_p^-(\lambda_S)\neq 0$ が証明できる．

(注 4) まず $k_d(\lambda_S)<\infty$ が簡単にチェックできる．後は Voiculescu のシャッテンノルムに関する不変量 k_d の値は 0 または ∞ であるという結果 ([Voi1]) を使えば良い．

(注 5) 2 つ注意がある．ひとつは Γ が $\mathbb{Z}^n$([Voi1]) と離散ハイゼンベルグ群 ([Ber]) に関しては既に予想が正しいことが示されていること．ふたつめは任意の $1\leq p<d$ に対して，$k_p(\lambda_S)\neq 0$ であること．つまり $\mathcal{C}_d^-(H)$ よりも小さいイデアル $\mathcal{C}_p(H)$ では確かに擬中心的近似列がとれないことが比較的簡単にチェックできるので，この 2 つの状況証拠から確かに予想は正しそうである．

3.3 証明方法？

多項式的成長度をもつ有限生成群については Gromov の大定理がある.

定理 21. ([Gro1]) 多項式的成長度をもつ有限生成群はベキ零群を有限位数の部分群として持つ.

この定理から多項式的成長度をもつ有限生成群について予想を証明するのにベキ零群で示せばよいことが簡単にわかる. 更に Γ をベキ零群としたとき, 有限正規部分群 Γ_0 が存在して, Γ/Γ_0 がねじれのない群とできることから, Γ をねじれのないベキ零群と仮定して示せば十分であることもわかる.

3.4 Grigorchuk 群について

中間的成長度をもつ有限生成群として Grigorchuk 群が知られている. Grigorchuk 群については [Har] に詳しく書いてある. Grigorchuk 群の成長度は

$$\beta_n(\Gamma, S) \sim \exp(n^\theta) \quad (0.5157 \le \theta \le 0.7674)$$

であるらしい. そこで更に問題として, 中間的成長度をもつ有限生成群に対応するノルムイデアルは何であるかということも当然気になってくる. そこで新たに対称ノルムを数列 $\pi_j^{(p)}$, $(0 < p < \infty)$

$$\pi_j^{(p)} = \frac{1}{(\log 2)^{1/p}} \cdot \frac{(\log(j+1))^{1/p}}{j}$$

に対して定義し, 対応するイデアルを $C_p^{\log}(H)$ と書くことにする.

注意 22. 任意の $p, q < \infty$ に対して,

$$C_q^-(H) \subsetneqq C_p^{\log}(H) \subsetneqq C_\infty^-(H)$$

である.

よって問題として例えば, 「Grigorchuk 群 Γ に対して, $k_p^{\log}(\lambda_S) \neq 0$ となる p の値を決定せよ.」が考えられる.

参考文献

[Ber] Bernier, D. *Quasicentral approximate units for the discrete Heisenberg group.* J. Operator Theory **29** (1993), no. 2, 225–236.

[CP] Coornaert, M.; Papadopoulos, A. *Horofunctions and symbolic dynamics on Gromov hyperbolic groups.* Glasg. Math. J. **43** (2001), no. 3, 425–456.

[GK] Gohberg, I. C.; Kreĭn, M. G. *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators.* Translated from the Russian by A. Feinstein. Translations of Mathematical Monographs, Vol. **18** American Mathematical Society, Providence, R.I. 1969.

[Gro1] Gromov, M. *Groups of polynomial growth and expanding maps.* Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No. **53** (1981), 53–73.

[Gro2] Gromov, M. *Hyperbolic groups.* Essays in group theory, 75–263, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **8**, Springer, New York, 1987.

[Har] de la Harpe, P. *Topics in geometric group theory.* Chicago Lectures in Mathematics.

[Kai] V. A. Kaimanovich, *Poisson boundary of discrete groups.* preprint.

[KV] V. A. Kaimanovich and A. M. Vershik, *Random walks on discrete groups: boundary and entropy.* Ann. Probab. **11** (1983), no. 3, 457–490.

[Oka1] Okayasu, R. *Entropy of subshifts and the Macaev norm.* to appear in J. Math. Soc. Japan.

[Oka2] Okayasu, R. *Gromov hyperbolic groups and the Macaev norm.* preprint.

[Oka3] Okayasu, R. *Quasicentral approximate units relative to the Macaev norm.* 数理解析研究所講究録 **1300** 「作用素環の構造研究とその応用」, 52–64 (2003).

[Ros] Rosenblatt, J. M. *Invariant measures and growth conditions.* Trans. Amer. Math. Soc. **193** (1974), 33–53.

[Sta] Stallings, J. *Group theory and three-dimensional manifolds.* A James K. Whittemore Lecture in Mathematics given at Yale University, 1969. Yale Mathematical Monographs, **4**. Yale University Press, New Haven, Conn.-London, 1971. v+65 pp.

[Voi1] Voiculescu, D. *Some results on norm-ideal perturbations of Hilbert space operators.* J. Operator Theory **2** (1979), no. 1, 3–37.

[Voi2] Voiculescu, D. *Some results on norm-ideal perturbations of Hilbert space operators. II.* J. Operator Theory **5** (1981), no. 1, 77–100.

[Voi3] Voiculescu, D. *On the existence of quasicentral approximate units relative to normed ideals. Part I.* J. Funct. Anal. **91** (1990), no. 1, 1–36.

[Voi4] Voiculescu, D. *Entropy of random walks on groups and the Macaev norm.* Proc. Amer. Math. Soc. **119** (1993), no. 3, 971–977.